EWMS, Serie 7

Jamal Drewlo, Daniel Max, Stefan Engelhardt

19. Dezember 2020

Aufgabe 23

Beweis. Sei $\omega \in \Omega$, dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$|X_n(\omega) + Y_n(\omega) - (X_0(\omega) + Y_0(\omega))| \leq |X_n(\omega) - X_0(\omega)| + |Y_n(\omega) - Y_0(\omega)|$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Nun folgt aus

$$|X_n(\omega) - X_0(\omega)| + |Y_n(\omega) - Y_0(\omega)| > \varepsilon$$

, dass

$$|X_n(\omega) - X_0(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2} \vee |Y_n(\omega) - Y_0(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}$$

Aus diesen beiden Beobachtungen folgt sofort

$$\begin{aligned}
&\{\omega : |X_n(\omega) + Y_n(\omega) - (X_0(\omega) + Y_0(\omega))| > \varepsilon\} \\
\subseteq&\{\omega : |X_n(\omega) - X_0(\omega)| + |Y_n(\omega) - Y_0(\omega)| > \varepsilon\} \\
\subseteq&\{\omega : |X_n(\omega) - X_0(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\} \cup \{\omega : |Y_n(\omega) - Y_0(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\}
\end{aligned}$$

Mit der Isotonie und Sub-Additivität erhalten wir

$$\begin{aligned}
&P\left(\{\omega : |X_n(\omega) + Y_n(\omega) - (X_0(\omega) + Y_0(\omega))| > \varepsilon\}\right) \\
\leq&P\left(\{\omega : |X_n(\omega) - X_0(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\}\right) + P\left(\{\omega : |Y_n(\omega) - Y_0(\omega)| > \frac{\varepsilon}{2}\}\right) \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$

da $X_n \xrightarrow{P} X_0$ und $Y_n \xrightarrow{P} Y_0$. $\square$

Aufgabe 24

Beweis. Wir verifizieren noch zuerst den Hinweis: Es gilt für $\omega \in \Omega$

$$X_n(\omega) \not\to 0 \iff \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : \exists m \geq n : X_m(\omega) \geq \frac{1}{k}$$
$$\overset{X_{n+1} \leq X_n}{\iff} \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} : X_n(\omega) \geq \frac{1}{k}$$

Daraus folgt die Mengenidentität des Hinweises. Wir sehen außerdem, dass wegen $X_{n+1} \leq X_n$, die $B_n^{(k)}$ für festes k eine fallende Folge (in n) sind. Damit folgt

$$\begin{aligned}
P\left(\{\omega : X_n(\omega) \not\to 0\}\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^{(k)}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n^{(k)}\right) \\
&\overset{\text{Stet.v.o}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} P(B_n^{(k)}) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} P(\{\omega : X_n(\omega) \geq \frac{1}{k}\}) \\
&\overset{X_n \xrightarrow{P} 0}{=} \sum_{k=1}^{\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit folgt sofort die gewünschte fast-sichere Konvergenz:

$$P(\{\omega : X_n(\omega) \to 0\}) = 1 - P\left(\{\omega : X_n(\omega) \not\to 0\}\right) \geq 1 - 0 = 1$$

□

Aufgabe 25

(i)
Wir definieren die Zufallsvariablen X_i auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ wie folgt

$$X_i(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{, Gewinn im } i\text{-ten Spiel} \\ 0 & \text{, Verlust im } i\text{-ten Spiel} \end{cases}$$

Wir wissen bereits, dass nun die $X_i (i \in \mathbb{N})$ unabhängig sind, und es gilt

$$P(X_i = 1) = \frac{18}{37}$$

Dann beschreibt ja gerade $\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = 0\}$ den Verlust in den ersten n Spielen. Daher beschreibt $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = 0\}$ den Verlust in allen Spielen und umgekehrt ist $(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = 0\})^c$ das Ereignis, dass er irgendwann gewinnt. Nun gilt

$$\begin{aligned}
P\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = 0\}\right)^c\right) &= 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = 0\}}_{\text{fallende Folge}}\right) \\
&\overset{\text{Stet.v.o.}}{=} 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = 0\}\right) \\
&\overset{\text{Unabh.}}{=} 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} P(\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = 0\}) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{19}{37}\right)^n \\
&= 1
\end{aligned}$$

Falls er im i-ten Spiel gewinnt, so hat er die ersten $i-1$ Spiele verloren. Somit ergibt sich

$$\text{"Einsatz"} = \sum_{k=1}^{i} 2^{k-1} = \sum_{k=0}^{i-1} 2^k = \frac{1-2^i}{1-2} = 2^i - 1$$

sowie

$$\text{"Auszahlung"} = 2 \cdot 2^{i-1} = 2^i$$

Das heißt der Nettogewinn beläuft sich stets auf 1 Euro.
(ii)
Es sei nun die Zufallsvariable Y_K wie folgt definiert:

$$Y_K(\omega) := \begin{cases} k & \text{, erster Gewinn an } k\text{-ter Stelle und } k \leq K \\ 0 & \text{, kein Gewinn unter den ersten } K \text{ Spielen} \end{cases}$$

Dann gilt ja für $1 \leq k \leq K$

$$P(Y_K = k) = \frac{18}{37}\left(\frac{19}{37}\right)^{k-1}$$

und

$$P(Y_K = 0) = \left(\frac{19}{37}\right)^{K}$$

Ferner sei Z_K der Nettogewinn (Verlust ist negativer Gewinn), wenn man höchstens K-mal spielen darf. Nach obigen Konstruktionen und Berechnungen heißt das gerade

$$Z_K(\omega) = \begin{cases} 1 & , Y_K(\omega) > 0 \\ -(2^K - 1) & , Y_K(\omega) = 0 \end{cases}$$

Somit ergibt sich für den Erwartungswert von Z_K:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Z_K] &= 1P(Z_K = 1) - (2^K - 1)P(Z_K = -(2^K - 1)) \\
&= 1P(Y_K > 0) - (2^K - 1)P(Y_K = 0) \\
&= P\left(\bigcup_{k=1}^{K}\{\omega : Y_K(\omega) = k\}\right) - (2^K - 1)\left(\frac{19}{37}\right)^{K} \\
&= \sum_{k=1}^{K} P(Y_K = k) - (2^K - 1)\left(\frac{19}{37}\right)^{K} \\
&= \sum_{k=1}^{K} \frac{18}{37}\left(\frac{19}{37}\right)^{k-1} - \left(\left(\frac{38}{37}\right)^{K} - \left(\frac{19}{37}\right)^{K}\right) \\
&= \frac{18}{37}\sum_{k=0}^{K-1}\left(\frac{19}{37}\right)^{k} - \left(\frac{38}{37}\right)^{K} + \left(\frac{19}{37}\right)^{K} \\
&= \frac{18}{37} \cdot \frac{1 - \left(\frac{19}{37}\right)^{K}}{\frac{18}{37}} - \left(\frac{38}{37}\right)^{K} + \left(\frac{19}{37}\right)^{K} \\
&= 1 - \left(\frac{38}{37}\right)^{K}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir auch

$$\lim_{K \to \infty} E[Z_K] = \lim_{K \to \infty}\left(1 - \left(\frac{38}{37}\right)^{K}\right) = -\infty$$